

A형 1번	영역 정보 : 교직수학	강좌명	9-11월 모의고사
		수업일 정보	11/14

기출문제

A형 1번

1. 다음은 함수와 관련한 수학사 자료를 순서 없이 제시한 것이다. (가)~(마)를 함수 개념이 발생한 순서대로 배열하시오. [2점]

(가)	고대 바빌로니아나 그리스에서 천문학을 연구했던 사람들은 태양, 달, 행성 등의 변화를 관찰하여 수표를 작성하였다. 이 시기 사람들은 수표를 사용하여 천체 운동을 서술하고 주기성을 발견하였다. 삼각함수의 기원을 이 시기에서 찾을 수 있다.
(나)	비에트(F. Viète)가 문자를 사용하는 방식을 발전시키고 데카르트(R. Descartes)가 해석기하학을 창안한 것에 기초하여 함수를 대수적으로 연구하게 되었다. $f(x)$ 라는 기호를 처음으로 사용한 오일러(L. Euler)는 변수와 상수가 결합된 방식에 따라 함수를 분류했다. 이 시기에 이르러 독립변수와 종속변수의 구분이 명확해졌다.
(다)	해석학을 엄밀하게 만들기 위해 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 연구가 이루어졌다. 데데킨트(R. Dedekind), 칸토어(G. Cantor) 등이 실수의 구조를 엄밀하게 하여 해석학을 발전시켰다. 부르바키(Bourbaki) 학파는 집합론에 기초하여 '순서쌍의 집합의 부분집합'이 어떤 특정한 조건을 만족할 때 그 부분집합을 함수로 정의하였다.
(라)	이 당시 학자들은 주로 운동을 나타내는 곡선을 중심으로 곡선의 접선, 곡선 아래의 넓이, 곡선의 길이, 곡선을 따라 움직이는 점의 속도 등을 연구하였다. 갈릴레이(G. Galilei)는 등가속도 운동을 하는 물체가 움직인 거리와 시간의 관계를 연구하였는데, 과학에서 이루어진 운동에 대한 연구가 함수를 개념화하는 데 기여하였다.
(마)	푸리에(Fourier) 급수나 디리클레(Dirichlet) 함수에 대한 연구 결과로 인하여 함수 개념을 새롭게 정의할 필요성이 생겨났다. 일가성과 임의성을 가지는 대응으로 함수를 정의함으로써 한 변수의 각 값에 다른 변수의 유일한 값이 대응되느냐 되지 않느냐는 논리적 조건에만 관심을 갖게 되었다.

적중 근거 자료

▶ 적중 자료

[모의고사 8회 전공 B]

2. 다음 <자료1>과 <자료2>는 중·고등학교 교육과정에서 함수의 개념을 설명한 것이다.

<자료1>

[개념 열기]

오른쪽 그래프는 지훈이가 토마토 모종을 재배하면서 x 주가 경과한 후의 토마토 줄기의 높이 y cm를 조사하여 나타낸 것이다.

1 다음 표는 그래프에서 x 의 각 값에 대응하는 y 의 값을 나타낸 것이다.

표의 빈칸을 알맞게 채우시오.

x	0	1	2	3	4	...
y	10					...

2 x 의 값이 0, 1, 2, ...로 변함에 따라 그에 대응하는 y 의 값은 각각 몇 개씩 정해지는지 말하시오.

[내용 설명]

위의 개념 열기에서 두 변수 x, y 사이의 대응 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	1	2	3	4	...
y	10	20	40	80	90	...

위의 표에서 x 의 값이 0, 1, 2, ...로 변함에 따라 그에 대응하는 y 의 값은 10, 20, 40, ...으로 각각 하나씩 정해진다.

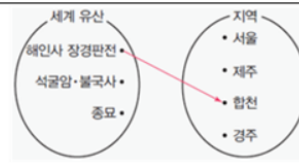
이와 같이 두 변수 x, y 에 대하여 x 의 값이 변함에 따라 y 의 값이 오직 하나씩 정해지는 대응 관계가 있을 때, y 를 x 의 **함수**라고 한다.

<자료2>

[개념 열기]

다음은 우리나라의 세계 유산 12개 중에서 1995년에 세계 유산으로 지정된 해인사 장경판전, 석굴암·불국사, 종묘이다.

오른쪽 그림에서 세계 유산과 그 유산이 있는 지역을 화살표로 연결하시오. [참고 자료: 문화재청, <http://www.cha.go.kr>]



[내용 설명]

공집합이 아닌 두 집합 X, Y 에 대하여 X 의 원소에 Y 의 원소를 짝 지어 주는 것을 집합 X 에서 집합 Y 로의 **대응**이라고 한다.

이때 집합 X 의 원소 x 에 집합 Y 의 원소 y 가 짝 지어진다면 x 에 y 가 대응한다고 하고, 이것을 기호로

$$x \rightarrow y$$

와 같이 나타낸다.

두 집합 X, Y 에 대하여 X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수라 하고, 이 함수 f 를 기호로

$$f: X \rightarrow Y$$

와 같이 나타낸다.

<자료 2>와 관련되는 함수의 역사적 발달 단계에 대하여 쓰고, 역사 발생적 원리에 따른 <자료 1>과 <자료 2>의 지도 순서를 설명하시오. 또한 중학교와 고등학교의 함수 영역에서 함수의 도입에 관한 '교수·학습 방법 및 유의사항'을 제시하시오. [4점]

모의고사 해설자료 (일부)

[2] 함수의 역사적 발달 단계

- 함수의 역사적 발생 단계

전 함수 단계	바빌로니아, 그리스	
기하적 함수 단계(17세기)	Oresme, Galilei	
대수적 함수 단계(18세기)	Bernoulli, Euler	
논리적 함수 단계(19세기)	Dirichlet, Hankel	
집합적 함수 단계(20세기)	Bourbaki	

KG에듀원 최소고시학원 수학교육원 모의고사 8주차 참고자료

page 4

1) 전 함수 단계 : 함수가 무엇인지 _____ 단계, 원시적 함수개념

- 바빌로니아 : 태양, 달, 행성, 성운의 운동 등 자연의 변화를 관찰하기 위한 함수표 등을 사용하였다. 바빌로니아 사람들은 수표를 사용해서 천체운동을 서술하려고 하였고, 천체의 위치의 주기성을 관찰하고, 관찰된 속도의 주기 함수의 주기적인 변화를 고려하면서, 그 경로의 사이사이를 직선으로 이어서 나타내었다. 사인보다 오래된 것이 탄젠트인데, 경사의 속도, 그림자의 길이로써의 탄젠트는 아주 자연스럽게 발생하였다.



[그림 3-2] 천체 운동을 표현한 지그재그 함수

▶ 적중 근거에 대한 해설

자료 2와 관련되는 함수의 역사적 발달 단계는 대응적 함수 단계이고, 역사 발생적 원리에 따른 자료 1과 자료 2의 지도순서는 종속에서 대응이다. 모의고사에서 묻고자 한 것은 '함수의 역사적 발달'이고 모의고사 해설 자료에서 요약 정리하였다.

▶ 적중 확률

적중률 80%

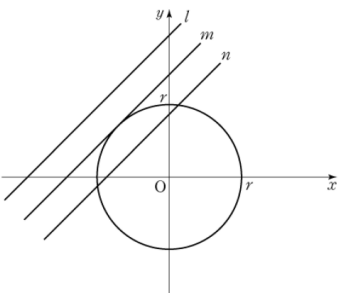
A형 5번	영역 정보 : 교직수학	강좌명	9-11월 모의고사
		수업일 정보	9/26(2회), 10/31(6회)

기출문제 A형 5번	적중 근거 자료												
5. 두빈스키(E. Dubinsky)는 스키마 구성을 설명하는 APOS 이론을 제안하였다. A는 행동(Action), P는 과정(Process), O는 대상(Object), S는 스키마(Schema)를 의미한다. 다음은 수학교육론 강의 시간에 교수가 APOS 이론을 설명하기 위해 제시한 두 고등학생의 학습 일지이다. 민수의 학습 일지 나는 $(5x^3 + x^2 - 4x - 2) \div (x - 2)$와 같은 형태의 나눗셈 문제를 조립제법으로 풀 수 있다. 그런데 선생님께서 오늘 수업 시간에 조립제법에서 사용하는 여러 값을 차례로 입력하면 나눗셈 결과가 나오는 컴퓨터 프로그램을 보여주시면서, 프로그램 안에 포함된 계산 과정을 설명해보라고 하셨다. 이 컴퓨터 프로그램을 잘 모르는 내 친구는 잘 설명했는데, 이 프로그램을 잘 다루는 나는 설명하지 못해서 속상했다. 재희의 학습 일지 나는 오늘 수업 시간에 함수와 관련된 어려움을 겪었다. “두 함수 f, g의 합 $f+g$를 두 수의 합 $2+1$처럼 생각하면 된다.”라고 하신 선생님 말씀이 잘 이해되지 않았다. 내가 아는 함수는 x의 값을 넣으면 y의 값이 나오는 것이었는데... “함수 f나 g를 2나 1과 같은 수처럼 다룰 수 있을까?”라는 의문이 들었다. 민수의 학습 일지에 서술된 상황을 ‘행동’ 및 ‘과정’과 관련지어 설명하고, 재희의 학습 일지에 서술된 상황을 ‘과정’ 및 ‘대상’과 관련지어 설명하시오. [4점]	▶ 적중 자료 [모의고사 2회 전공 A] 2. APOS 이론에 의하면 어떤 수학적 개념이 구성되기 위해서는 다음과 같은 과정을 거쳐 행동이 스키마로 발전하게 된다. APOS 이론의 과정 아래에 제시된 문제를 행동, 과정, 대상 단계로 나누어 풀이를 제시하시오. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 4) = 8$ [모의고사 6회 전공 B] 4. 다음은 코트릴 등(Cottrill et al.)이 APOS이론에 따라 다음과 같이 극한 개념에 대하여 발생적 분해를 하였다. <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;">1단계</td><td>이전의 정보보다 a에 가까운 각각의 연속적인 몇 개의 점들에서의 함수 f를 평가</td></tr> <tr> <td>2단계</td><td>1단계의 활동을 ‘x가 a로 접근할 때, $f(x)$가 L로 접근한다.’라는 하나의 과정으로 내면화</td></tr> <tr> <td>3단계</td><td>2단계를 요약하여 극한 과정을 행동이 적용 가능한 대상으로 만들. 예) 극한 성질들을 조합함</td></tr> <tr> <td>4단계</td><td>2단계를 구간과 부등식에 관하여 재구성한다. 즉, $0 < x - a < \delta$, $f(x) - L < \epsilon$의 기호를 사용</td></tr> <tr> <td>5단계</td><td>이전 단계의 재구성 단계를 극한의 형식적 정의와 연결하는 수량화 스키마를 구성하고, 임의의 양수 ϵ에 대한 양수 δ, 적절한 구간에서의 x에 대한 부등식을 고려함.</td></tr> <tr> <td>6단계</td><td>완벽한 $\epsilon - \delta$ 개념을 특정한 상황에 응용</td></tr> </table>	1단계	이전의 정보보다 a 에 가까운 각각의 연속적인 몇 개의 점들에서의 함수 f 를 평가	2단계	1단계의 활동을 ‘ x 가 a 로 접근할 때, $f(x)$ 가 L 로 접근한다.’라는 하나의 과정으로 내면화	3단계	2단계를 요약하여 극한 과정을 행동이 적용 가능한 대상으로 만들. 예) 극한 성질들을 조합함	4단계	2단계를 구간과 부등식에 관하여 재구성한다. 즉, $0 < x - a < \delta$, $ f(x) - L < \epsilon$ 의 기호를 사용	5단계	이전 단계의 재구성 단계를 극한의 형식적 정의와 연결하는 수량화 스키마를 구성하고, 임의의 양수 ϵ 에 대한 양수 δ , 적절한 구간에서의 x 에 대한 부등식을 고려함.	6단계	완벽한 $\epsilon - \delta$ 개념을 특정한 상황에 응용
1단계	이전의 정보보다 a 에 가까운 각각의 연속적인 몇 개의 점들에서의 함수 f 를 평가												
2단계	1단계의 활동을 ‘ x 가 a 로 접근할 때, $f(x)$ 가 L 로 접근한다.’라는 하나의 과정으로 내면화												
3단계	2단계를 요약하여 극한 과정을 행동이 적용 가능한 대상으로 만들. 예) 극한 성질들을 조합함												
4단계	2단계를 구간과 부등식에 관하여 재구성한다. 즉, $0 < x - a < \delta$, $ f(x) - L < \epsilon$ 의 기호를 사용												
5단계	이전 단계의 재구성 단계를 극한의 형식적 정의와 연결하는 수량화 스키마를 구성하고, 임의의 양수 ϵ 에 대한 양수 δ , 적절한 구간에서의 x 에 대한 부등식을 고려함.												
6단계	완벽한 $\epsilon - \delta$ 개념을 특정한 상황에 응용												

[수학 김지혜 2020학년도 기출 적중 자료]

	위와 같은 발생적 분해는 함수의 그래프를 따라 값의 수열을 구함으로써 a로 가까이 가는 x의 과정을 나타내고 있다. 발생적 분해의 각 단계를 APOS 이론의 행동, 과정, 대상, 스키마 단계로 분류하시오. 또한 $f(x) = 2x + 1$의 그래프에서 x가 2에 가까워지는 과정을 이해할 때, 발생적 분해를 참고하여 행동과 과정 단계에서 어떤 개념이 구성되는지 각각 설명하시오. [4점] ▶ 적중 근거에 대한 해설 APOS이론에 대한 문제가 2020임용시험에 출제될 것을 예측하여, 9-11월 모의고사에서 두 문항을 만들었고 이와 관련된 이론을 해설자료에서 강의하였다. 행동과 과정 단계로 따로 떼어서 문제를 만들었는데, 문항 패턴도 적중한 것 같다. ▶ 적중 확률 적중률 90%
--	---

A형 6번	영역 정보 : 수학 교수학 습 이론	강좌명	9-11월 모의고사
		수업일 정보	9/26(2회), 11/14(8회)

기출문제 A형 6번	적중 근거 자료
6. 다음은 윤 교사가 고등학교 수학 '도형의 방정식' 단원에서 사용한 활동 과제 중 3가지를 나타낸 것이다. (1) 다음 [그림 1], [그림 2], [그림 3]은 축구공이 골라인을 나타내는 직선 l을 지나가는 상황을 차례로 찍은 사진이다. [그림 1], [그림 2], [그림 3]에서 각각 직선 l을 x축으로 하여 좌표축을 설정하고 축구공을 나타내는 원을 식으로 표현하시오. ※ 준비물: 삼각자  [그림 1] [그림 2] [그림 3] (2) 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 알아보시오.  (3) 원 $x^2 + y^2 = r^2$과 직선 $y = px + q$의 위치 관계를 이차방정식의 판별식을 이용하여 설명하시오. 트레퍼스(A. Treffers)가 제시한 수평적 수학과 수직적 수학화의 의미를 설명하고, 윤 교사의 활동 과제를 수평적 수학과 수직적 수학화의 관점에서 분석하여 서술하시오. [4점]	▶ 적중 자료 [모의고사 2회 전공 B] 1. 다음 예들은 프로이덴탈의 개념적 사례들이다. 빈칸 (A)와 (B)에 공통적으로 들어갈 용어를 순서대로 쓰시오. [2점] (가) 구체물을 세어 $2+7=7+2$임을 인식하는 것은 (A)이고, 이러한 덧셈의 성질을 일반화하여 덧셈의 교환법칙인 $a+b=b+a$로 나타내는 것은 (B)이다. (나) 아무렇게나 흩어져 있는 구슬의 개수를 세는 문제가 있을 때, 이 구슬을 직사각형으로 배열하거나 몇 개씩 묶는 것은 (A)이며, 이러한 배열이나 묶음을 보고 덧셈이나 곱셈으로 나타내는 것은 (B)이다. (다) 파스칼의 삼각형에서 한 행의 $r-1$번째의 수와 r번째의 수의 합이 그 다음 행의 r번째의 수라는 규칙성을 인식하는 것은 (A)이며, 이 파스칼의 삼각형 배열로부터 이항전개식의 이항 계수를 조합의 기호를 사용해서 나타내는 것은 (B)이다. [모의고사 8회 전공 B] 3. 다음은 고등학교 [수학Ⅱ] 수업시간에 탐구문제에서 제시한 내용이다. [문제] 어느 회사에서 A주식에 투자하려고 한다. 주식을 산지 t년 후에 그 주식을 팔 경우 예상되는 순이익을 $P(t)$만원이라고 하면 $P(t) = -t^4 + 12t^3 - 48t^2 + 64t \quad (0 \leq t \leq 4)$ 라고 한다. 이때 순이익이 최대가 되려면 몇 년 후에 주식을 팔아야 하는지 구하시오. 위 내용을 수학적 모델링 과정을 반영하여 학생들의 해결과정을 서술하시오. 또한 해결과정 중에서 프로이덴탈의 수평적 수학과 수직적 수학과 과정을 구분하여 제시하시오. [4점]

모의고사 해설 자료 일부

KG에듀원 최소고사학원 수학교육은 모의고사 2주차 참고자료

page 12

수학적인 활동을 반영하는 학문이다.”라고 말하면서 실행된 수학을 반영하는 것을 중요한 수학적 태도로 보고 있다.

- 프로이덴탈은 수학화가 수학교육에서 중요한 과정인 이유를 두 가지를 들고 있다. 첫째, 수학화는 수학자의 주된 활동일 뿐 아니라 학생들이 일상생활에 대한 수학적 접근에 친숙하도록 한다. 두 번째 이유는 재발명의 아이디어와 관련된 것이다. 수학에서, 마지막 단계는 공리화의 방법으로 형식화된다. 이 마지막 지점이 우리가 가르치는 수학의 시작점이어서는 안 된다.
- 한편 트레퍼스(Treffers)는 학습 장면에서 학생들이 직접 행하는 수학적 활동은 주어진 상황마다 다르며 더 많은 다양한 활동으로 세분될 수 있음을 보였다. 또한 트레퍼스는 수학을 수학적 수학과 수학적 수학과 서로 교대로 일어나는 과정으로 보았다.

트레퍼스(Treffers)	프로이덴탈
• 현실 내의 문제 장면(problem field)을 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 것	• 현실적인 것으로 체험된 세계에서 좀 더 추상화된 기호의 세계로 이행되는 것
• 세련된 좀 더 높은 수학적 처리가 가능하도록 하는 것	• 추상화된 기호의 세계에서 기호들이 계속 형성되고 이해되고 완성되는 것

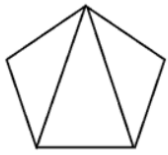
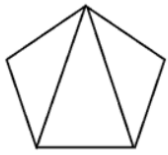
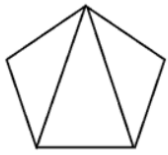
▶ 적중 근거에 대한 해설

수평적 수학과 수직적 수학과에 대한 문제가 2020임용시험에 출제될 것을 예측하여, 9-11월 모의고사에서 두 문항을 만들었고, 이와 관련된 이론을 위와 같이 해설자료에서 강의하였다. 비록 프로이덴탈에 대한 문제를 만들었으나 맥락상 트레퍼스와 차이가 없고, 문항 패턴도 일치하였다.

▶ 적중 확률

적중률 90%

B형 1번	영역 정보: 수리철학	강좌명	7-8월 영역별 문제풀이 9-11월 모의고사
		수업일 정보	8/1, 11/14

기출문제 B형 1번	적중 근거 자료														
1. 다음은 라카토스(I. Lakatos)의 준경험주의 수리철학에 대한 두 교사의 대화이다. 이 교사: 라카토스에 따르면 수학적 지식은 반증되기 전까지 잠정적으로 참이며, 증명은 원래의 추측을 부분 추측으로 분해하는 사고 실험이에요. 김 교사: 수학적 추측이 증명되었을 때 그 추측을 반박하는 전면적 반례가 등장하면 어떻게 하나요? 이 교사: 대응하는 방식이 여러 가지가 있는데요. 한 방식은 ㉠ 이미 증명된 추측은 그대로 두고 오히려 반례가 잘못되었다고 보아 원래의 추측을 존속시키는 거예요. 이 방식은 반례와 관련된 개념을 추측이 성립하는 영역 밖으로 몰아내는 것에 주로 관심을 두어 개념을 재정의하지요. 김 교사: 또 다른 방식은 어떤 것이 있나요? 이 교사: ㉡ 전면적 반례가 출현하게 된 원인이 되는 부분 추측을 찾아 원래의 추측에 합체시키고 증명과 추측을 개선하는 방식이 있어요. 이 방식에서 전면적 반례는 동시에 국소적 반례도 되지요. 이 방식을 통해 발견과 정당화의 논리가 분리되지 않고 하나로 통합될 수 있어요. 전면적 반례에 의해 추측이 비판되었을 때 대응하는 방식 ㉠과 ㉡을 라카토스가 제시한 용어로 순서대로 쓰시오. [2점]	▶ 적중 자료 [7,8월 영역별 문제풀이 3회 전공 B] 1. 다음은 중학교 1학년 수준에서 라카토스(Lakatos)의 증명과 반박을 이용한 n각형의 내각의 크기를 구하는 과정을 나타낸 것이다. <table border="1"> <tr> <th colspan="2">문제상황 : n각형의 내각의 크기의 합은?</th></tr> <tr> <td>소박한 추측</td><td>$(n-2) \times 180^\circ$</td></tr> <tr> <td>(가)</td><td>1단계 : n각형을 여러 개의 삼각형으로 나눈다. 2단계 : 여러 개로 나누어진 삼각형의 내각의 크기의 합을 모두 더한다.</td></tr> <tr> <td>(나)</td><td>1단계에서 n각형을 여러 개의 삼각형으로 나누는 방법에는 다음과 같은 방법이 있다. </td></tr> <tr> <td>부분 추측의 개선</td><td>n각형의 한 꼭짓점에서 그른 대각선에 의해 여러 개의 삼각형으로 나눈다. </td></tr> <tr> <td>전면적 반례의 등장</td><td>다음과 같은 모양의 다각형이 있다.  ⇒ 괴물 배제법 : 이것은 다각형이 아니다.</td></tr> <tr> <td>보조정리 합체법에 의한 추측의 개선</td><td>볼록 n각형의 내각의 크기의 합은 $(n-2) \times 180^\circ$이다.</td></tr> </table> (가)와 (나)의 설명에 해당하는 개념을 순서대로 쓰시오. [2점]	문제상황 : n 각형의 내각의 크기의 합은?		소박한 추측	$(n-2) \times 180^\circ$	(가)	1단계 : n 각형을 여러 개의 삼각형으로 나눈다. 2단계 : 여러 개로 나누어진 삼각형의 내각의 크기의 합을 모두 더한다.	(나)	1단계에서 n 각형을 여러 개의 삼각형으로 나누는 방법에는 다음과 같은 방법이 있다. 	부분 추측의 개선	n 각형의 한 꼭짓점에서 그른 대각선에 의해 여러 개의 삼각형으로 나눈다. 	전면적 반례의 등장	다음과 같은 모양의 다각형이 있다.  ⇒ 괴물 배제법 : 이것은 다각형이 아니다.	보조정리 합체법에 의한 추측의 개선	볼록 n 각형의 내각의 크기의 합은 $(n-2) \times 180^\circ$ 이다.
문제상황 : n 각형의 내각의 크기의 합은?															
소박한 추측	$(n-2) \times 180^\circ$														
(가)	1단계 : n 각형을 여러 개의 삼각형으로 나눈다. 2단계 : 여러 개로 나누어진 삼각형의 내각의 크기의 합을 모두 더한다.														
(나)	1단계에서 n 각형을 여러 개의 삼각형으로 나누는 방법에는 다음과 같은 방법이 있다. 														
부분 추측의 개선	n 각형의 한 꼭짓점에서 그른 대각선에 의해 여러 개의 삼각형으로 나눈다. 														
전면적 반례의 등장	다음과 같은 모양의 다각형이 있다.  ⇒ 괴물 배제법 : 이것은 다각형이 아니다.														
보조정리 합체법에 의한 추측의 개선	볼록 n 각형의 내각의 크기의 합은 $(n-2) \times 180^\circ$ 이다.														

[9-11월 모의고사 8회 전공 B]

[1-2] 다음은 대학교 해석학 수업시간에 교수가 제시한 문제와 그 풀이 과정이다.

교수 : 다음 문제를 라카토스의 수학적 지식의 성장 과정에 따라 개선해보도록 합시다.

[문제] 집합 B 위에서 정의된 연속함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 함수 f 에 점별 수렴하면 f 는 B 위에서 연속이다.

학생 A : 교수님, 우선은 라카토스의 증명관에 따라 추측과 부분추측으로 분해하는 단계에 맞춰 증명해 보겠습니다.

(1) 수학적 추측을 제기하는 단계

집합 E 에서 정의된 연속함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 함수 f 에 점별 수렴하면, f 는 E 위에서 연속이다.

(중략)

추측의 개선 : ① 집합 E 에서 정의된 연속함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 함수 f 에 평등수렴하면, f 는 E 위에서 연속이다.

2. 위 문제풀이 과정 중 (3)번에 적절한 반례를 한 가지 제시하시오. 또한 원래 추측을 개선한 명제 ①은 반례에 대한 대응 방법 중 어느 것을 활용한 것인지 쓰고, 그 개념을 설명하시오. [4점]

모의고사 해설 자료 일부

KG에듀원 최소고사학원 수학교육원 모의고사 5주차 참고자료

page 6

<전공 B>

[1-2] 라카토스의 준 경험주의

1. 반례의 종류

- 라카토스에게 증명은 추측에 들어 있는 여러 개의 부분 추측 (보조 정리)을 드러내는, 또는 원래의 추측을 더 많은 부분 추측으로 분해하는 사고 실험이다. 이렇게 추측을 부분 추측으로 분해하여 놓으면, 부분 추측 하나하나에 대한 비판을 할 수 있으므로 반박하기가 더 쉬워진다.
- 반례에는 부분 추측을 반박하는 _____와 원래의 추측을 반박하는 _____가 있다. 국소적 반례는 증명의 비판이지만 추측의 비판은 아니다. 이러한 반례가 발견되면 반박된 부분 추측을 대체시킴으로써 증명, 곧 부분 추측 체계를 개선할 수 있다.

2. 전면적 반례에 의해 추측이 비판되었을 때 대응하는 방식

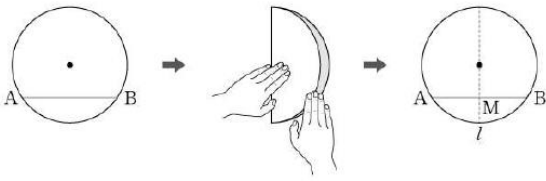
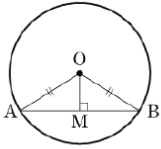
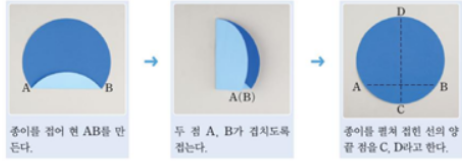
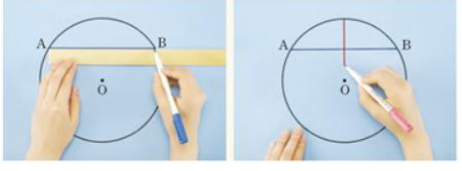
	경의	특징
1) 괴물 배제법	추측은 이미 증명되었기 때문에 증명된 추측은 옳으며 오히려 반례가 잘못되었다고 보고 _____하여 원래의 추측을 존속시키는 방법이다.	- 괴물배제법은 추측에 포함된 개념들을 다시 경의 하여, 반례(괴물)를 _____ 밖으로 몰아내고, 추측을 살리는 방법이다. - 이렇게 되면 용어가 처음보다 경교하게 재정의 된다. - 예외배제법은 예외에 대하여 언급한 조건절을 원래의 추측에 첨가하기 때문에 경의가 축소되지 않는다.

▶ 적중 근거에 대한 해설

라카토스의 준경험주의에 대한 문제가 2020임용시험에 출제될 것을 예측하여, 7-8월 문제풀이와 9-11월 모의고사에서 각각 문제화하였고, 이와 관련된 이론을 위와 같이 해설자료에서 강의하였다. 9-11월 모의고사에서 반례에 의한 대응방식인 '보조정리 합체법'에 대한 개념을 쓰는 부분에서 2020 임용시험과 일치하였다.

▶ 적중 확률 **적중률 90%**

B형 3번	영역 정보 : 교직수학, 문제해결(정당화)	강좌명	9-11월 모의고사
		수업일 정보	10/31(6회), 11/7(7회)

기출문제 B형 3번	적중 근거 자료
3. 원의 현에 관한 성질 중 한 가지를 지도하기 위해 교사가 <자료 1>과 <자료 2>를 개발하였다. <자료 1> ① 원 모양의 종이에 현 AB를 그린다. ② 점 A와 점 B가 겹쳐지도록 접었다가 펼친다. ③ ②에서 접은 선을 l이라 하고, l과 현 AB가 만나는 점을 M이라고 한다.  질문: 직선 l이 원의 중심을 지나는가? 직선 l이 현 AB와 이루는 각의 크기는 얼마인가? $\overline{AM}$과 $\overline{BM}$의 길이를 비교하시오. <자료 2> 원 O의 중심에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 $\triangle OAM$과 $\triangle OBM$에서 $\overline{OA} = \overline{OB}$ (반지름) $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$ $\overline{OM}$은 공통 이므로 직각삼각형의 합동 조건에 의하여 $\triangle OAM \cong \triangle OBM$이다. 따라서 $\overline{AM} = \overline{BM}$이다. 이로부터 다음을 알 수 있다. (㉠)  <자료 1>과 <자료 2>를 통해 교사가 공통으로 가르치려는 원의 현에 관한 성질 ㉠을 서술하시오. 그리고 <자료 1>과 <자료 2>에서 사용한 정당화 방법이 무엇인지 각각 쓰고, 두 자료를 학생 수준에 맞게 수업에서 어떻게 활용할지 서술하시오. [4점]	▶ 적중 자료 [9-11월 모의고사 6회 전공 A] 3. 김교사는 원의 중심과 현의 수직이등분선 사이의 관계를 지도하기 위하여 중학교 3학년 학생들에게 아래와 같이 두 가지 활동을 안내하였다. [활동 1] 종이에 원을 그려 오린 다음 아래와 같이 종이를 접어 보자.  답구 1 현 CD가 원의 중심을 지나고 현 AB와 수직임을 설명해 보자. 답구 2 현 CD가 현 AB를 이등분함을 설명해 보자. [활동 2] 다음 순서에 따라 활동하여라. ① 컴퍼스를 사용하여 종이 위에 원 O를 그리고, 원 O에서 현 AB를 그린다. ② 점 A와 점 B가 겹쳐지도록 접은 후 펼쳐서 $\overline{AB}$의 수직이등분선을 그린다.  답구 1 $\overline{AB}$의 수직이등분선이 원의 중심을 지나는지 말하여라. 던즈(Bruner)의 수학 학습 이론에서 볼 때, [활동 1]과 [활동 2]는 어떤 학습 원리를 적용한 것인지 1가지만 찾아 쓰고, 그 원리를 설명하시오. [4점]

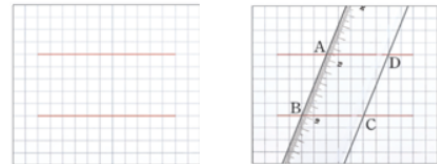
[9-11월 모의고사 7회 전공 B]

[1-2] 이 교사는 중학교 2학년 학생들에게 <평행사변형>을 지도하는데 있어서 반힐레의 수학 학습 수준 이론을 반영하여 수업을 계획하였다. 다음은 수업에 활용하는 탐구활동과 실제로 수업을 진행하는 상황이다.

<자료 1>

<평행사변형의 성질>

[탐구 활동 1] 다음 단계로 활동하고, 물음에 답하시오.



- ① 모눈종이 위에 평행한 두 직선을 그린다.
- ② 평행선 위에 직사각형 모양의 자를 비스듬히 대 평행사변형 ABCD를 그린다.

- 1 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 와 길이가 같은 변을 각각 말하시오.
- 2 $\angle A$, $\angle B$ 와 크기가 같은 각을 각각 말하시오.

<내용 정리 1 : 평행사변형의 성질>

- ① 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.
- ② 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.
- ③ 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

(중략)

<자료 2>

교사 : 평행사변형은 두쌍의 대변이 평행인 사각형으로 정의합니다. 평행사변형에서 아래 그림처럼 대각선을 그어 보면 어떤 성질을 발견할 수 있나요? 교과서의 증명과정을 보도록 합시다.

다음 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 대각선 AC를 긋자.



... (중략)

학생 : '평행사변형에서 두 쌍의 대변의 길이가 같고, 두 쌍의 대각의 크기도 같다'고 증명하고 있습니다. 그런데 증명과정에서 왜 이런지를 잘 모르겠습니다. 증명은 그 방법이 정해져 있어서 이해하기가 힘들어요.

교사 : 이해하기가 힘들니까 우선 외우도록 해요. 증명과정을 보면 삼각형의 합동조건을 이용하여 증명을 하고 있죠? 평행사변형에서 증명은 삼각형의 합동조건을 떠올리면 외우기 쉽다는 것을 알 수 있어요. 다음 문제는 '평행사변형에서 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다'는 성질을 발견하는 과정이에요. 각자 증명과정을 보고 여기에서 쓰인 삼각형의 합동조건을 찾아보도록 해요. ... (중략) 평행사변형의 성질과 평행사변형이 되는 조건은 다음과 같이 정리할 수 있어요.

(중략)

1. [탐구 활동 1, 2]의 활동과 <내용 정리 1>의 성질을 발견하는 것은 반힐레의 기하학습 수준 중 어느 단계에 해당되는지 각각 쓰시오. [2점]

[수학 김지혜 2020학년도 기출 적중 자료]

	▶ 적중 근거에 대한 해설 9-11월 모의고사 6회에서 '교과서 내용'이 유사하여, 수강생들이 시험을 볼 때 문제가 익숙하게 느껴졌을 것이다. 모의고사 7회에서는 탐구활동의 두 가지 사례를 제시하였고, 반힐레의 수준이론과 연결하였기 때문에 2020 임용 문제와 맥락상 유사하다. ▶ 적중 확률 적중률 70%
--	---

B형 4번	평가 : 프로젝트 평가	강좌명	7-8월 영역별 문제풀이
		수업일 정보	8/1

기출문제 B형 4번	적중 근거 자료					
4. 박 교사는 상관관계를 지도하는 수업 시간에 학생들에게 ‘휴대전화 사용 시간과 수면 시간의 상관관계’를 포스터로 제작하도록 하였다. A 모둠 학생들이 만든 포스터는 다음과 같다. 휴대전화 사용 시간과 수면 시간 A 모둠 ● 자료 수집 우리 반 학생 20명을 대상으로 전날의 휴대전화 사용 시간과 수면 시간을 조사하였다. ● 자료 정리 20명의 자료를 (휴대전화 사용 시간, 수면 시간)의 순서쌍으로 나타내고 산점도를 그렸다. ● 자료 분석 우리 반 학생들의 휴대전화 사용 시간과 수면 시간 사이에 음의 상관관계가 있다. ● 결론 휴대전화 사용 시간을 줄이면 학생들의 수면 시간이 늘어날 것이다. 박 교사는 프로젝트 평가 방법을 사용하여 학생들의 포스터를 다음의 항목에 대해 평가할 계획이다. <table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td rowspan="4">평가 항목</td> <td>(1) 자료를 적절한 방법으로 수집하였는가?</td> </tr> <tr> <td>(2) 자료를 조사 목적에 맞게 정리하였는가?</td> </tr> <tr> <td>(3) 자료를 옳게 분석하였는가?</td> </tr> <tr> <td>(4) 결론이 적절한가?</td> </tr> </table> 이 수업의 평가 방법으로 프로젝트 평가가 적절한 이유를 설명 하시오. 그리고 평가 항목 (3)에 따라 A 모둠 포스터의 ‘자료 분석’을, 평가 항목 (4)에 따라 A 모둠 포스터의 ‘결론’을 평가하여 그 결과를 각각 서술하시오. [4점]	평가 항목	(1) 자료를 적절한 방법으로 수집하였는가?	(2) 자료를 조사 목적에 맞게 정리하였는가?	(3) 자료를 옳게 분석하였는가?	(4) 결론이 적절한가?	▶ 적중 자료 [7,8월 영역별 문제풀이 3회 전공 B] 4. 박 교사는 중학교 1학년 대수 단원을 학습한 이후에 다음과 같은 평가 문항을 제시하였다. 위 문제처럼 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$을 모두 사용하고 기호 $+, -, \times, \div$ 및 괄호를 사용하여 1부터 12까지의 수를 자신만의 식으로 나타내고, ②, ③ 번 과정을 되풀이하여 시계를 완성하고 발표해 보도록 하자. 제시된 문항에 대한 적절한 평가 유형을 쓰고, 교과 역량 평가(3가지 이상)를 할 수 있는 분석적 채점 <u>기준표</u>를 작성하시오. [4점] ▶ 적중 근거에 대한 해설 ‘프로젝트 평가’에 관한 문제로 실제 임용시험과 출제 영역과 문항이 일치하였다. ▶ 적중 확률 적중률 90%
평가 항목		(1) 자료를 적절한 방법으로 수집하였는가?				
		(2) 자료를 조사 목적에 맞게 정리하였는가?				
		(3) 자료를 옳게 분석하였는가?				
	(4) 결론이 적절한가?					

B형 5번	영역 정보 : 문제해결, 교 직수 (정당화)	강좌명	9-11월 모의고사
		수업일 정보	10/17(4회), 9/26(2회), 11/7(7회)

기출문제

적중 근거 자료

B형 5번 (기출문제 정보 작성)

5. 다음은 김 교사의 교수·학습 지도안에 대하여 교사들이 나눈 대화이다.

김 교사: 교수·학습 지도안을 다음과 같이 작성해 보았습니다.

학습 목표	무리수의 개념을 이해한다.																														
단계	교수·학습 활동																														
도입	- 준비 학습: 유리수의 정의를 상기한다. - 동기 유발: 실생활에서 무리수의 예를 보여주는 동영상 시청한다. - 본시 학습 목표를 확인한다.																														
전개	- 스프레드시트를 이용하여 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 설명한다. <table border="1"> <thead> <tr> <th></th><th>A</th><th>B</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td>x</td><td>x^2</td></tr> <tr> <td>2</td><td>1.3</td><td>1.69</td></tr> <tr> <td>3</td><td>1.4</td><td>1.96</td></tr> <tr> <td>4</td><td>1.5</td><td>2.25</td></tr> <tr> <td>5</td><td>1.41</td><td>1.9881</td></tr> <tr> <td>6</td><td>1.42</td><td>2.0164</td></tr> <tr> <td colspan="3">...</td></tr> <tr> <td>11</td><td>1.41421</td><td>1.999899241</td></tr> <tr> <td>12</td><td>1.41422</td><td>2.0000182084</td></tr> </tbody> </table> - 무리수와 실수를 정의한다. - 무리수 $\sqrt{2}$를 수직선에 나타내는 방법을 설명한다.		A	B	1	x	x^2	2	1.3	1.69	3	1.4	1.96	4	1.5	2.25	5	1.41	1.9881	6	1.42	2.0164	...			11	1.41421	1.999899241	12	1.41422	2.0000182084
	A	B																													
1	x	x^2																													
2	1.3	1.69																													
3	1.4	1.96																													
4	1.5	2.25																													
5	1.41	1.9881																													
6	1.42	2.0164																													
...																															
11	1.41421	1.999899241																													
12	1.41422	2.0000182084																													
정리	본시 학습 내용을 정리한다.																														

최 교사: $\sqrt{2}$ 가 순환하지 않는 무한소수임을 설명하기 위해 공학적 도구를 이용하였네요. 2015 개정 수학과 교육과정에 이에 대한 근거가 있나요?

김 교사: 네, ㉠ 정보 처리 능력을 함양하기 위한 교수·학습 방법에 명시된 내용이 있습니다.

최 교사: 그렇군요. 지도 수업 시간에 스프레드시트를 이용한 적이 있는데, ㉡ 학생들이 $\sqrt{2}$ 가 순환하지 않는 무한소수라는 것에는 관심을 두지 않고 “선생님, 무슨 식을 입력하였기에 x 에 수를 넣으면 x^2 이 계산되는 건가요? 스프레드시트 다루는 방법 좀 알려주세요.”라는 말을 해서 난감했던 적이 있었습니다.

김 교사: 그런 점을 주의하여 수업을 하려고 합니다.

김 교사가 교수·학습 지도안에서 스프레드시트를 이용한 근거를 ㉠의 구체적인 내용으로 제시하시오. 그리고 브루소(G. Brousseau)의 교수학적 상황론에서 ㉡을 설명할 수 있는 극단적인 교수 현상을 쓰고, 그 현상을 ㉢의 상황과 관련지어 설명하시오. [4점]

▶ 적중 자료

[모의고사 4회 전공 A]

3. 다음은 탐구형 소프트웨어를 이용하여 이차함수의 그래프 변화를 학습하는 과정이다.

탐구형 소프트웨어를 이용하여 a 의 값에 따른 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프의 변화를 관찰하는 과정은 다음과 같다.

- ① 화면 아래의 입력 칸에 $y = x^2$ 을 입력하고 [Enter]를 누르면 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프가 좌표평면 위에 그려진다.
- ② ①과 같은 방법으로 $y = 2x^2$ 을 입력하고 [Enter]를 누르면 ①에서 그린 이차함수의 그래프가 있는 좌표평면 위에 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프가 그려진다.
- ③ ①, ②와 같이 $a > 0$ 인 경우에 a 의 값을 다르게 하여 이차함수의 식을 입력하면 a 의 값에 따른 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프의 변화를 관찰할 수 있다. 이와 같은 방법으로 $a < 0$ 인 경우도 그 그래프의 변화를 관찰할 수 있다.

(중략)

이차함수의 그래프 학습에서 공학적 도구의 활용의 의미를 1가지만 설명하고, 위 학습 상황과 관련 있는 2015 개정 교육과정 교수·학습방법의 정보처리능력을 함양하기 위한 강조점을 제시하시오. [4점]

[모의고사 2회 전공 A]

3. 다음 대화는 골드바흐의 추측을 지도하는 수업 상황의 일부이다.

교사 : 다음의 식들을 생각하여 보세요.

$$20 = 17 + 3 \quad 22 = 19 + 3 \quad 24 = 17 + 7$$

$$26 = 13 + 13 \quad 28 = 17 + 11$$

이 식들에서 어떤 규칙성을 찾은 학생이 있나요?

민수 : 좌변의 모든 수는 20단위의 짝수들입니다.

교사 : 맞아요. 우변에 더해진 수들은 어떤가요?

가영 : 모두 홀수입니다.

교사 : 맞아요. 홀수라는 성질 외에 다른 성질을 발견한 학생이 있나요?

가영 : 모두 소수입니다.

교사 : 아주 잘했어요. 민수와 가영이의 대답을 종합해서 발표할 학생?

철민 : 20단위의 모든 짝수는 홀수인 두 소수의 합과 같습니다.

교사 : 여러분은 이 사실이 다른 짝수에 대해서도 성립할 것이라고 생각하나요? 몇 가지 예를 생각해 볼까요? 30, 10, 52는 어떤가요?

민수 : 30은 17과 13의 합이므로 성립합니다.

(학생들은 10과 52에 대해서도 이 성질이 성립하는 예를 제시한다.)

교사 : 여러분, 이제 각자 짝수 3개를 택하여 이 성질이 성립하는지 확인해 보세요. 이 성질이 성립하지 않은 예를 발견한 학생이 있나요?

학생들 : (아무 대답이 없다)

교사 : ㉠ 4와 6은 어떤가요?

(중략)

대화에서 볼 수 있는 추론의 유형을 쓰고, 그 이유를 설명하시오. 밑줄 친 ㉠의 교사의 발문으로 야기되는 브루소의 극단적 교수현상을 설명하시오.

[모의고사 7회 전공 A]

2. 다음은 고등학교 1학년 [명제] 단원 수업의 한 장면이다.

교사 : 명제사이의 관계를 이용하여 다음 문제를 풀어볼까요?

[문제] 두 조건

$$p: |x-1| \geq 2, \quad q: |x-k| \geq 3$$

에 대하여 $q \rightarrow p$ 가 참이 되게 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.

(중략)

교사 : ㉡ 이때 $-3+k$ 는 -1 과 같아도 포함관계가 성립하지 않을까요?

혜진 : 아, 알겠어요. $0 \leq k \leq 2$ 입니다.

밑줄 친 ㉠의 해진의 풀이가 사회적 구성주의의 지식 구성과정 중 어느 단계에 해당하는지 설명하시오. 또한 이 수업에서 나타나는 극단적인 교수현상 중 ㉡에서 해당하는 것을 쓰고, 제시한 현상의 의미를 위의 상황과 관련지어 설명하시오. (4점)

모의고사 해설 자료 일부

KG에듀윌 회소고시학원 수학교육론 모의고사 7주차 참고자료

page 4

5. 브루소의 극단적인 교수현상

- 수학 교수·학습 상황에서 경계해야 할 극단적인 교수 현상은, 메타-인지 이동(meta-cognitive), 형식적 고착(formal abidance), 토파즈식 외면치레(Topaze effect), 조르단식 외면치레(Jourdain effect)의 네 가지로 살펴볼 수 있다. 메타-인지 이동은 학생의 개인화/배경화 과정을 지나치게 강조한 결과이고, 형식적 고착은 학생의 개인화/배경화 과정을 과소평가한 결과로 이해할 수 있다. 토파즈식 외면치레는 학생의 탈개인화/탈배경화 과정을 강조한 결과이고, 조르단식 외면치레는 학생의 탈개인화/탈배경화 과정을 간과한 결과로 이해할 수 있다.

(1) 메타-인지 이동

- 메타-인지 이동(meta-cognitive shift)은 학생의 개인화/배경화의 과정을 용이하게 하기 위해 도입된 교수학적 보조 수단에 학생들의 사고가 집중되는 현상을 의미한다. 즉, 수학적 지식의 개인화/배경화에 주목한 나머지 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식 자체로부터 교수학적 교안물로 옮겨가는 것을 의미한다.

▶ 적중 근거에 대한 해설

2015 개정 교육과정에서 '정보처리능력'을 함양하기 위한 교수학습 방법을 묻는 문항이 일치하였다.

또한 극단적인 교수 현상은 모의고사 2회, 7회에서 다루었고, 2020 임용시험 문항과 일치하였다.

▶ 적중 확률

적중률 95%

2020학년도 임용 시험 총평 한마디

이번 임용시험은 기출 분석이 잘 되었다면 쉽게 쓸 수 있는 문항으로 구성되었다. 또한 개념에 대한 정확한 서술을 요구하는 문제가 상당 수 있었다.
